

## Bruchterme 3

Sammlung der Aufgaben  
aus 12110 Bruchterme 1  
und 12111 Bruchterme 2

Dort werden alle Methoden ausführlich an Beispielen besprochen

Zum Einsatz im Unterricht.

Datei Nr. 12112

Stand: 12. Juni 2017

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

[www.mathe-cd.schule](http://www.mathe-cd.schule)

**Diese Texte zu Termen gibt es in der Mathematik-CD**

12101	Äquivalente Terme: Klammern multiplizieren
12101A	Aufgabenblätter zu 12101
12102:	Binomische Formeln
12103:	Faktorisieren und Quadratische Ergänzung
12104:	Faktorisieren mit beliebigen Klammern
12105:	Berechnung von $(a+b)^n$ mit Pascalschem Dreieck sowie $(a+b+c)^2$
12106	Binomialkoeffizient
12107	Testaufgaben
12108	Zur Wiederholung: Grundlagen kompakt
12109	Zur Wiederholung: Grundlagentest (Was weiß ich noch?)

**Texte zum Thema Bruchterme:**

12110	Bruchterme 1	(Definitionsbereich, Kürzen, Erweitern)
12111	Bruchterme 2	(Addition, Subtraktion)
12112	Bruchterme 3	Trainingsaufgaben aus diesen zwei Dateien
12116	Polynomdivision	

  

12145	Bruchgleichungen 1	(ohne quadratische Gleichungen)
12146	Bruchgleichungen 3	(mit Parametern)
12240	Bruchgleichungen 2	(die auf quadratische Gleichungen führen)

## Aufgaben aus 12110: Grundlagen zu Bruchtermen

### 1. Definitionsbereiche finden

#### Aufgabe 1

Bestimme den Definitionsbereich folgender Terme:

a)  $\frac{4x}{2-x}$

b)  $\frac{x^2}{3x+7}$

c)  $\frac{5x-2}{8x}$

d)  $\frac{3+x}{2x-10}$

e)  $\frac{x}{13x-39}$

f)  $\frac{2x}{8-x}$

g)  $\frac{4x+5}{-2}$

h)  $\frac{3x+7}{1-9x}$

i)  $\frac{15}{4x} + \frac{12}{x+12}$

j)  $\frac{x+2}{2-x} - \frac{x^2}{3x+12}$

k)  $\frac{5x+2}{8x-12} + \frac{2}{6x-9}$

#### Aufgabe 2

Bestimme den Definitionsbereich folgender Terme:

a)  $\frac{2x+3}{x(x-1)}$

b)  $\frac{x^2+4}{(x-2)(x+3)}$

c)  $\frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}$

d)  $\frac{x^2+x+1}{(3x+7)(3x-7)}$

e)  $\frac{2x+4}{(x+5)(x+2)}$

f)  $\frac{x^2-4}{(2x+5)(3x-12)}$

g)  $\frac{x+3}{x^2+12x}$

h)  $\frac{5}{x^2-4x}$

#### Aufgabe 3

Bestimme den Definitionsbereich folgender Terme:

Faktorisiere zuerst die Nenner:

a)  $\frac{4}{x^2-49}$

b)  $\frac{x-4}{3x^2-108}$

c)  $\frac{x^2+1}{7x^2-343}$

d)  $\frac{x^2+2}{5x^2-5x}$

e)  $\frac{5x+1}{x(x+4)(x+2)}$

f)  $\frac{3x-1}{(x^2-9)(x^2-25)}$

#### Aufgabe 4

Bestimme den Definitionsbereich folgender Terme:

a)  $\frac{x^2}{x^2-64}$

b)  $\frac{2}{16-x^2}$

c)  $\frac{x-2}{5x^2-20} + \frac{1}{x}$

d)  $\frac{1}{12x^2-75}$

#### Aufgabe 5

Faktorisiere und bestimme die Nullstellen

a)  $x^2-8x+16$

b)  $x^2-16x+64$

c)  $x^2+10x+25$

d)  $x^2-5x+\frac{25}{4}$

e)  $9x^2-6x+1$

f)  $2x^2+28x+98$

g)  $\frac{1}{2}x^2-12x+72$

i)  $5x^2-10x+5$

#### Aufgabe 6

Bestimme den Definitionsbereich

a)  $\frac{4}{x^2+4x+4}$

b)  $\frac{3}{x^2+18x+81} - \frac{2x}{2x+18}$

c)  $\frac{3x-1}{x^2+22x+121} - \frac{2}{x^2-121}$

**Aufgabe 7** Bestimme den Definitionsbereich

$$\text{a) } \frac{12}{x^2 + 8x - 33} \quad \text{b) } \frac{2x + 1}{x^2 - 5x - 50} \quad \text{c) } \frac{x^3}{x^2 - 10x + 21} \quad \text{d) } \frac{x^2 + 1}{x^2 + 7x + 12}$$

$$\text{e) } \frac{3x}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{f) } \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 8} \quad \text{g) } \frac{3x - 8}{x^2 - 5x - 14} \quad \text{h) } \frac{x^2 + 16}{x^2 - 9x + 14}$$

**Aufgabe 8** Bestimme zuerst den Definitionsbereich, berechne dann Funktionswerte zu

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{für } x \in \{1; 2; 3; -1; 0\}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{8x}{x^2 - 4} \quad \text{für } x \in \{1; 2; -3; \frac{1}{2}; 0\}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2 - 3}{(x+1)(x-2)} \quad \text{für } x \in \{1; 2; -3; 5; 0\}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + 4x - 5} \quad \text{für } x \in \{1; 2; -3; 5; 0\}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 8} \quad \text{für } x \in \{1; -2; 6; -6; 0\}$$

**Aufgabe 9** Berechne die Werte für die angegebenen Brüche und Bruchterme:

$$\text{a) } T(x) = \frac{x+5}{2-x} \quad \text{für } x = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{3}{5} \quad \text{und} \quad x = -\frac{7}{2}$$

$$\text{b) } T(x) = \frac{5x-2}{x^2-4x} \quad \text{für } x = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{3}{5} \quad \text{und} \quad x = -\frac{7}{2}$$

$$\text{c) } T(x) = \frac{x^2}{(x+3)(x-1)} \quad \text{für } x = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad x = -\frac{3}{5}$$

$$\text{d) } T(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 9} \quad \text{für } x = \frac{1}{3}; \quad x = \frac{9}{2} \quad \text{und} \quad x = -\frac{4}{5}$$

$$\text{e) } T(x) = \frac{x-3}{2x+4} + \frac{x+1}{x} \quad \text{für } x = \frac{1}{3}; \quad x = \frac{9}{2} \quad \text{und} \quad x = -\frac{4}{5}$$

## 2. Kürzen

### Aufgabe 10

a)  $\frac{12ab^2}{18a^3b}$

b)  $\frac{32x^4y^5z^2}{24x^4y^4z^4}$

c)  $\frac{48u^2v^5}{80u^9v^3}$

d)  $\frac{27x^5yz^3}{45x^4y^2z^3}$

e)  $\frac{111u^4v^4w^4}{74u^5v^4w^3}$

f)  $\frac{38x^{12}y^{20}z^{14}}{57x^{14}y^{18}z^9}$

### Aufgabe 11

a)  $\frac{4(x+3)}{8(3+x)}$

b)  $\frac{15(x+2)}{15+2}$

c)  $\frac{24(2x+3)}{12(2x+3)^2}$

d)  $\frac{8a(3a+2b)^2}{16a^2(2b+3a)}$

e)  $\frac{(a+3b)^2(b+3a)}{(a+3b)(b+3a)^2}$

f)  $\frac{15x}{30x^2+15x}$

### Aufgabe 12

 Zerlege in Faktoren und kürze dann:

a)  $\frac{x^2+4x}{3x+12}$

b)  $\frac{16x^2-8x}{24x-12}$

c)  $\frac{x^2-y^2}{x+y}$

d)  $\frac{3x+4}{9x^2-16}$

e)  $\frac{45x+105}{45x^2-245}$

f)  $\frac{x^4-4x^2}{2x^2-4x}$

### Aufgabe 13

 Zerlege in Faktoren und kürze dann:

a)  $\frac{x^4-16}{(x+2)^2}$

b)  $\frac{(x^2-9)(4-x^2)}{(3+x)(x-2)}$

c)  $\frac{x^2y^2-xy^3}{x^2y^2+xy^3}$

d)  $\frac{81x^4-1}{(3x+1)^2}$

e)  $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$

f)  $\frac{2x^2-128}{x^2+16x+64}$

### Aufgabe 14

 Faktorisiere und kürze dann:

a)  $\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}$

b)  $\frac{x^2-3x-10}{x^2+4x+4}$

c)  $\frac{x^2-8x+15}{x^2-8x+16}$

d)  $\frac{x^2-2x-24}{x^3-16x}$

e)  $\frac{x^2-4x-45}{(x^2-81)(x^2-25)}$

f)  $\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^4-10x^2+9}$

### Aufgabe 15

 Faktorisiere und kürze dann:

a)  $\frac{4x-12}{15-5x}$

b)  $\frac{x^2-4x}{(16-x^2)}$

c)  $\frac{25-x^2}{x^2-10x+25}$

d)  $\frac{x^2+2x-3}{-x^2-3x+4}$

## Aufgaben aus 12111: Rechnen mit Bruchtermen

### 3. Addieren und Subtrahieren

#### Aufgabe 16

Addiere bzw. subtrahiere diese Brüche:

a)  $\frac{7}{12} + \frac{11}{18}$

b)  $\frac{11}{42} - \frac{5}{28}$

c)  $\frac{19}{30} + \frac{1}{70}$

d)  $\frac{15}{32} - \frac{49}{80}$

#### Aufgabe 17

Addiere bzw. subtrahiere diese Brüche:

a)  $\frac{5}{6} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9}$

b)  $\frac{3}{14} + \frac{5}{28} + \frac{1}{18}$

c)  $\frac{24}{25} - \frac{7}{20} + \frac{11}{15}$

d)  $\frac{13}{16} - \frac{5}{24} - \frac{7}{18}$

#### Aufgabe 18

a)  $4 - \frac{3}{x}$

b)  $\frac{1}{3}x + \frac{2}{x}$

c)  $x + 2 - \frac{4}{x}$

d)  $\frac{x}{4} - \frac{4}{x^2}$

e)  $\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}$

f)  $\frac{4}{x} + \frac{5}{3x}$

g)  $2x - \frac{5}{x+2}$

h)  $\frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1}$

i)  $\frac{x-2}{3} - \frac{3}{x} + \frac{5-x}{6x}$

j)  $\frac{4-x}{x^2} + \frac{x+1}{4x}$

k)  $\frac{4}{x+1} - \frac{4}{x+2}$

l)  $\frac{5}{x+1} + \frac{5}{x-1}$

m)  $\frac{10x+5}{(2x+1)^2} - \frac{5}{2x+1}$

n)  $\frac{4+x}{4-x} + \frac{1}{x-4}$

o)  $\frac{4}{3x^2} + \frac{2x^2}{5x^4} - \frac{x}{x^3}$

#### Aufgabe 19

a)  $\frac{2}{5x^2+4x} + \frac{3x}{5x+4}$

b)  $\frac{2x+1}{(3x-4)(x+3)} + \frac{5x-2}{(2x-1)(x+3)}$

c)  $\frac{12x}{8x-48} - \frac{7x}{5x+30}$

d)  $\frac{3x-1}{x^2-2x} + \frac{4x+11}{x^2+2x}$

#### Aufgabe 20

a)  $\frac{14x-49}{x^2-49} + \frac{x-7}{x+7}$

b)  $\frac{x^2+4}{3x^2-12} + \frac{3x}{2-x} - \frac{5x}{x+2}$

c)  $\frac{4x}{(x+3)^2} - \frac{2x}{x^2-9}$

d)  $\frac{x+y}{2x+3y} + \frac{y-x}{3x-2y}$

**Aufgabe 21**

a)  $\frac{8x+2}{x^2-4x-21} - \frac{5x+12}{x^2-49}$       b)  $\frac{x^2-4}{x^2+12x+35} - \frac{x^2-5}{x^2+10x+25}$

c)  $\frac{4x+1}{x^2-12x+36} - \frac{5x+2}{x^2-4x-12}$       d)  $\frac{x^2+3x-1}{x^2-4x-5} - \frac{x^2-2x+2}{x^2+5x+4}$

**Aufgabe 22**

a)  $\frac{8}{3x^2-75} + \frac{2}{x^2+10x+25} - \frac{1}{6x}$

b)  $\frac{2}{x^2-14x+49} + \frac{2}{x^2-6x+9} - \frac{4}{x^2-10x+21}$

#### 4. Multiplizieren und dividieren

##### Aufgabe 23

$$\text{a) } \frac{12}{7} \cdot \frac{28}{15} \quad \text{b) } \frac{44}{9} \cdot \frac{18}{77} \quad \text{c) } \frac{50}{39} \cdot \frac{56}{75} \quad \text{d) } \frac{21}{20} \cdot \frac{36}{91} \quad \text{e) } \frac{24}{85} \cdot \frac{51}{32}$$

##### Aufgabe 24

$$\text{a) } \frac{14}{9} \cdot \frac{28}{45} \quad \text{b) } \frac{2}{15} \cdot \frac{16}{45} \quad \text{c) } \frac{36}{49} \cdot \frac{24}{35} \quad \text{d) } \frac{8}{19} \cdot \frac{2}{57} \quad \text{e) } \frac{5}{12} \cdot \frac{15}{8}$$

##### Aufgabe 25

$$\text{a) } \frac{3}{4} \cdot 8 \quad \text{b) } \frac{12}{25} \cdot 15 \quad \text{c) } 24 \cdot \frac{5}{18} \quad \text{d) } 40 \cdot \frac{13}{16} \quad \text{e) } \frac{11}{3} \cdot 12$$

##### Aufgabe 26

$$\text{a) } \frac{20}{33} : 4 \quad \text{b) } \frac{15}{2} : 4 \quad \text{c) } \frac{42}{25} : 28 \quad \text{d) } 12 : \frac{3}{8} \quad \text{e) } 108 : \frac{24}{25}$$

##### Aufgabe 27

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x}{3} \cdot \frac{2x}{x+1} & \text{b) } \frac{5}{x^2} \cdot \frac{x^3}{15} & \text{c) } \frac{x-2}{x+3} \cdot \frac{x-2}{x-3} \\ \text{d) } \frac{x^2-4}{3x} \cdot \frac{x+1}{x+2} & \text{e) } \frac{x+1}{x^2+4x} \cdot \frac{x+4}{x^2-1} & \text{f) } \frac{(x+1)^2}{4x} \cdot \frac{12x^2}{x+1} \\ \text{g) } \frac{x^2-25}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2-4}{x-5} & \text{h) } \frac{x^3-9x}{4x} \cdot \frac{16}{3-x} \end{array}$$

##### Aufgabe 28

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{ab}{c} : \frac{a^2b}{c^2} & \text{b) } \frac{x^2yz^2}{a^2b} : \frac{x^3y^2z}{a^2b^2} & \text{c) } \frac{x-1}{x+2} : \frac{x-1}{2x+4} & \text{d) } \frac{x^2}{x+5} : \frac{x+5}{x^2} \\ \text{e) } \frac{x+y}{x^2 \cdot y} : \frac{x^2-y^2}{x \cdot y^2} & \text{f) } \frac{(x+1)^2}{(x-3)^3} : \frac{x^2-1}{x^2-9} & \text{g) } \frac{24x}{(5x-2)^2} : \frac{48x}{25x^2-4} & \text{h) } \frac{x^2-8x}{x+3} : (2x-16) \end{array}$$

##### Aufgabe 29

$$\begin{array}{lll} \text{a) } xy^2 \cdot \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) & \text{b) } \frac{ab}{cd} \cdot \left( \frac{abc}{d} + \frac{bcd}{a} \right) & \text{c) } \frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{abc} + \frac{ac}{b} - \frac{a}{bc} \right) \\ \text{d) } 4x^2y \cdot \left( \frac{y}{8x^2} + \frac{1}{2xy^2} \right) & \text{e) } (a-b) \cdot \left( \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2-ab} \right) \end{array}$$



# Lösungen

# LÖSUNGEN aller Aufgaben

## Aufgaben aus 12110: Grundlagen zu Bruchtermen

### Lösung Aufgabe 1

- |    |                                       |            |  |   |
|----|---------------------------------------|------------|--|---|
| a) | $\frac{4x}{2-x}$                      | $2-x=0$    | Nullstelle des Nenners: $x=2$ .  | $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$            |
| b) | $\frac{x^2}{3x+7}$                    | $3x+7=0$   | Nullstelle des Nenners: $x=-\frac{7}{3}$   | $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{7}{3}\}$ |
| c) | $\frac{5x-2}{8x}$                     | $8x=0$     | Nullstelle des Nenners: $x=0$  | $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$            |
| d) | $\frac{3+x}{2x-10}$                   | $2x-10=0$  | Nullstelle des Nenners: $x=5$ :  | $D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$            |
| e) | $\frac{x}{13x-39}$                    | $13x-39=0$ | Nullstelle des Nenners: $x=3$  | $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$            |
| f) | $\frac{2x}{8-x}$                      | $8-x=0$    | Nullstelle des Nenners: $x=8$  | $D = \mathbb{Q} \setminus \{8\}$            |
| g) | $\frac{4x+5}{-2}$                     |            | Der Nenner hat keine Nullstelle:   | $D = \mathbb{Q}$                            |
| h) | $\frac{3x+7}{1-9x}$                   | $1-9x=0$   | Nullstelle des Nenners: $x=\frac{1}{9}$  | $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{9}\}$  |
| i) | $\frac{15}{4x} + \frac{12}{x+12}$     |            | Nullstelle des 1. Nenners: $x=0$<br>Nullstelle des 2. Nenners: $x=-12$                   | $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -12\}$       |
| j) | $\frac{x+2}{2-x} - \frac{x^2}{3x+12}$ |            | Nullstelle des 1. Nenners: $x=2$<br>Nullstelle des 2. Nenners: $x=-4$                    | $D = \mathbb{Q} \setminus \{2; -4\}$        |
| k) | $\frac{5x+2}{8x-12} + \frac{2}{6x-9}$ |            | Nullstelle des 1. Nenners: $x=\frac{3}{2}$<br>Nullstelle des 2. Nenners: $x=\frac{3}{2}$ | $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{3}{2}\}$  |

## Lösung Aufgabe 2

- a)  $\frac{2x+3}{x(x-1)}$   $x \cdot (x-1) = 0$  wenn einer der Faktoren 0 wird, also  $x_1 = 0$   
 oder  $x - 1 = 0$ , was  $x_2 = 1$  bedeutet.  $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$
- b)  $\frac{x^2+4}{(x-2)(x+3)}$   $(x-2)(x+3) = 0$  wenn  $(x-2) = 0$  also  $x_1 = 2$  ist,  
 oder wenn  $(x+3) = 0$  also  $x_2 = -3$  ist.  $D = \mathbb{Q} \setminus \{2; -3\}$
- c)  $\frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}$   $x(x+1)(x-1) = 0$ : Der Nenner hat die Nullstellen 0, -1 und 1.  
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -1; 1\}$
- d)  $\frac{x^2+x+1}{(3x+7)(3x-7)}$  Aus  $3x+7=0$  folgt  $x_1 = -\frac{7}{3}$ , aus  $3x-7=0$  folgt  $x_2 = \frac{7}{3}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm\frac{7}{3}\}$
- e)  $\frac{2x+4}{(x+5)(x+2)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{-5; -2\}$
- f)  $\frac{x^2-4}{(2x+5)(3x-12)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{5}{2}; 4\}$
- g)  $\frac{x+3}{x^2+12x} = \frac{x+3}{x(x+12)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -12\}$
- h)  $\frac{5}{x^2-4x} = \frac{5}{x(x-4)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 4\}$

## Lösung Aufgabe 3

Kurzlösungen

- a)  $\frac{4}{x^2-49} = \frac{4}{(x+7)(x-7)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 7\}$
- b)  $\frac{x-4}{3x^2-108} = \frac{x-4}{3 \cdot (x^2-36)} = \frac{x-4}{3 \cdot (x+6)(x-6)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 6\}$
- c)  $\frac{x^2+1}{7x^2-343} = \frac{x^2+1}{7(x^2-49)} = \frac{x^2+1}{7(x+7)(x-7)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 7\}$
- d)  $\frac{x^2+2}{5x^2-5x} = \frac{x^2+2}{5x(x-1)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$
- e)  $\frac{5x+1}{x(x+4)(x+2)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -2; -4\}$
- f)  $\frac{3x-1}{(x^2-9)(x^2-25)} = \frac{3x-1}{(x+3)(x-3)(x+5)(x-5)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 3; \pm 5\}$

## Lösung Aufgabe 4

### 1. Methode: Lösung durch Faktorisierung:

a)  $\frac{x^2}{x^2 - 64} = \frac{x^2}{(x+8)(x-8)}$  Nullstellen des Nenners:  $x_1 = -8, x_2 = 8$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 8\}$

b)  $\frac{2}{16 - x^2} = \frac{2}{(4+x)(4-x)}$  Nullstellen des Nenners:  $x_1 = -4, x_2 = 4$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 4\}$

c)  $\frac{x-2}{5x^2-20} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{5(x^2-4)} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{5(x+2)(x-2)} + \frac{1}{x}$   
 Nullstellen des 1. Nenners:  $x_1 = -2, x_2 = 2$ .  
 Nullstelle des 2. Nenners:  $x_3 = 0$ .  $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 2; 0\}$

d)  $\frac{1}{12x^2-75} = \frac{1}{3 \cdot (4x^2-25)} = \frac{1}{3 \cdot (2x+5)(2x-5)}$   
 Nullstellen des Nenners:  $x_1 = -\frac{5}{2}$  und  $x_2 = \frac{5}{2}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm \frac{5}{2}\}$

### 2. Methode: Lösung durch Lösen quadratischer Gleichungen (und Grundmenge $\mathbb{R}$ )

a)  $\frac{x^2}{x^2 - 64}$  Nullstellen des Nenners:  $x^2 - 64 = 0$   
 $x^2 = 64 \quad |\sqrt{\phantom{x}}$   
 $|x| = 8$   
 $x_{1,2} = \pm 8$   $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 8\}$

b)  $\frac{2}{16 - x^2}$  Nullstellen des Nenners:  $16 - x^2 = 0$   
 $x^2 = 16 \quad |\sqrt{\phantom{x}}$   
 $|x| = 4$   
 $x_{1,2} = \pm 4$   $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$

c)  $\frac{x-2}{5x^2-20} + \frac{1}{x}$  1. Nenner:  $5x^2 - 20 = 0 \quad |:5$   
 $x^2 = 4 \quad |\sqrt{\phantom{x}}$   
 $|x| = 2$   
 $x_{1,2} = \pm 2$   
 2. Nenner:  $x_3 = 0$ .  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2; 0\}$

d)  $\frac{1}{12x^2-75}$  Nullstellen des Nenners:  $12x^2 - 75 = 0 \quad |:12$   
 $x^2 = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}$   
 $|x| = \frac{5}{2}$   
 $x_{1,2} = \pm \frac{5}{2}$   $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{5}{2}\}$

## Lösung Aufgabe 5

### 1. Faktorisierung mit binomischen Formeln:

- a)  $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$                       b)  $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$
- c)  $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$                       d)  $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = (x - \frac{5}{2})^2$
- e)  $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$                       f)  $2x^2 + 28x + 98 = 2 \cdot (x^2 + 14x + 49) = 2 \cdot (x + 7)^2$
- g)  $\frac{1}{2}x^2 - 12x + 72 = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 24x + 144) = \frac{1}{2}(x - 12)^2$
- i)  $5x^2 - 10x + 5 = 5 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 5(x - 1)^2$

### 2. Faktorisierung über die Lösung quadratischer Gleichungen (keine p-q-Formel):

Beachte: Wenn der Radikand Null wird, gibt es eine doppelte Lösung und somit erhält man zwei gleiche Faktoren, die man dann als Quadrat aufschreibt:

- a)  $x^2 - 8x + 16 = 0$                        $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$                        $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$
- b)  $x^2 - 16x + 64 = 0$                        $x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 64}}{2} = \frac{16 \pm 0}{2} = 8$                        $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$
- c)  $x^2 + 10x + 25 = 0$                        $x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-10 \pm 0}{2} = -5$                        $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
- d)  $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$                        $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot \frac{25}{4}}}{2} = \frac{5 \pm 0}{2} = \frac{5}{2}$                        $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = (x - \frac{5}{2})^2$
- e)  $9x^2 - 6x + 1 = 0$                        $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{1}{3}$
- $9x^2 - 6x + 1 = 9 \cdot (x - \frac{1}{3})^2 = [3 \cdot (x - \frac{1}{3})]^2 = (3x - 1)^2$
- f)  $2x^2 + 28x + 98 = 0 \quad | :2$
- $x^2 + 14x + 49 = 0$                        $x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{-14 \pm 0}{2} = -7$
- $2x^2 + 28x + 98 = 2 \cdot (x^2 + 14x + 49) = 2 \cdot (x + 7)^2$
- g)  $\frac{1}{2}x^2 - 12x + 72 = 0$                        $x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 72}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 12 \pm 0 = 12$
- $\frac{1}{2}x^2 - 12x + 72 = \frac{1}{2}(x - 12)^2$
- i)  $5x^2 - 10x + 5 = 0 \quad | :5$
- $x^2 - 2x + 1 = 0$                        $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$                        $5x^2 - 10x + 5 = 5(x - 1)^2$

## Lösung Aufgabe 6

### 1. Mittels Faktorisieren mit binomischen Formeln:

a)  $\frac{4}{x^2 + 4x + 4}$

Nenner = 0:  $x^2 + 4x + 4 = 0$

1. binomische Formel:  $(x + 2)^2 = 0$

Nullstelle des Nenners:  $x = -2$

Definitionsbereich:  $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

b)  $\frac{3}{x^2 + 18x + 81} - \frac{2x}{2x + 18}$

1. Nenner = 0:  $x^2 + 18x + 81 = 0$

1. binomische Formel:  $(x + 9)^2 = 0$

Nullstelle des 1. Nenners:  $x = -9$

2. Nenner = 0:  $2x + 18 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 9) = 0$

$x_2 = -9$

Definitionsbereich:  $D = \mathbb{Q} \setminus \{-9\}$

c)  $\frac{3x - 1}{x^2 + 22x + 121} - \frac{2}{x^2 - 121}$

1. Nenner = 0:  $x^2 + 22x + 121 = 0$

1. binomische Formel:  $(x + 11)^2 = 0$

Nullstelle des 1. Nenners:  $x_1 = -11$

2. Nenner = 0:  $x^2 - 121 = 0$

3. binomische Formel:  $(x + 11)(x - 11) = 0$

Nullstelle des 2. Nenners:  $x_{2,3} = \pm 11$

Definitionsbereich:  $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 11\}$

## 2. Mittels Lösen quadratischer Gleichungen:

*Ich verwende die p-q-Formel aus Prinzip nicht!*

a)  $\frac{4}{x^2 + 4x + 4}$

Nenner = 0:  $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$$

Definitionsbereich:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b)  $\frac{3}{x^2 + 18x + 81} - \frac{2x}{2x + 18}$

1. Nenner = 0:  $x^2 + 18x + 81 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 81}}{2} = \frac{-18 \pm 0}{2} = -9$$

2. Nenner = 0:  $2x + 18 = 0 \quad | :2$

$$x_3 = -9$$

Definitionsbereich:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-9\}$

c)  $\frac{3x - 1}{x^2 + 22x + 121} - \frac{2}{x^2 - 121}$

1. Nenner = 0:  $x^2 + 22x + 121 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 121}}{2} = \frac{-22 \pm 0}{2} = -11$$

2. Nenner = 0:  $x^2 - 121 = 0$

$$x^2 = 121 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$|x| = 11$$

$$x_{3,4} = \pm 11$$

Definitionsbereich:  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 11\}$

## Lösung Aufgabe 7

### 1. Methode: Faktorisieren in $(x+a)(x+b)$ :

- a)  $\frac{12}{x^2 + 8x - 33}$   $x^2 + 8x - 33 = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$
- Vergleichen ergibt:  $a \cdot b = -33$  und  $a + b = 8$
- Das klappt mit  $a = -3$  und  $b = 11$ :  $(x - 3)(x + 11) = 0$
- mit den Lösungen  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -11$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{3; -11\}}$
- b)  $\frac{2x + 1}{x^2 - 5x - 50}$   $x^2 - 5x - 50 = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$
- Vergleichen ergibt:  $a \cdot b = -50$  und  $a + b = -5$
- Das klappt mit  $a = 5$  und  $b = -10$ :  $(x + 5)(x - 10) = 0$
- mit den Lösungen  $x_1 = -5$  und  $x_2 = 10$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{-5; 10\}}$
- c)  $\frac{x^3}{x^2 - 10x + 21}$   $x^2 - 10x + 21 = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$
- Vergleichen ergibt:  $a \cdot b = 21$  und  $a + b = -10$
- Das klappt mit  $a = -3$  und  $b = -7$ :  $(x - 3)(x - 7) = 0$
- mit den Lösungen  $x_1 = 3$  und  $x_2 = 7$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{3; 7\}}$
- d)  $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 7x + 12}$   $x^2 + 7x + 12 = 0$  Faktorisieren führt auf  $(x + 3)(x + 4) = 0$
- und damit auf die Lösungen  $-3$  und  $-4$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; -4\}}$
- Erklärung:  $12 = 3 \cdot 4$  und  $3 + 4 = 7$ .
- e)  $\frac{3x}{x^2 + 5x + 6}$   $x^2 + 5x + 6 = 0$ . Faktorisieren führt auf  $(x + 2)(x + 3) = 0$
- mit den Lösungen  $x_1 = -2$  und  $x_2 = -3$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; -3\}}$
- f)  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 8}$   $x^2 + 2x - 8 = 0$ . Faktorisieren führt auf  $(x - 2)(x + 4) = 0$
- mit den Lösungen  $x_1 = 2$  und  $x_2 = -4$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{2; -4\}}$
- g)  $\frac{3x - 8}{x^2 - 5x - 14}$   $x^2 - 5x - 14 = 0$ . Faktorisieren führt auf  $(x + 2)(x - 7) = 0$
- mit den Lösungen  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 7$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 7\}}$
- h)  $\frac{x^2 + 16}{x^2 - 9x + 14}$   $x^2 - 9x + 14 = 0$ . Faktorisieren führt auf  $(x - 2)(x - 7) = 0$
- mit den Lösungen  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 7$ :  $\mathbf{D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 7\}}$



## Lösung Aufgabe 7

### 2. Methode: Lösen quadratischer Gleichungen:

Ich verwende die p-q-Formel nicht – eigentlich gar nie.

Es gibt viele Fälle, in denen sie ganz umständlich und nicht hilfreich ist.

- a)  $\frac{12}{x^2 + 8x - 33}$        $x^2 + 8x - 33 = 0$        $x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 33}}{2} = \frac{-8 \pm 14}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = 3$  und  $x_2 = -11$        $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{3; -11\}$
- b)  $\frac{2x + 1}{x^2 - 5x - 50}$        $x^2 - 5x - 50 = 0$        $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 50}}{2} = \frac{5 \pm 15}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = 10$  und  $x_2 = -5$        $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 10\}$
- c)  $\frac{x^3}{x^2 - 10x + 21}$        $x^2 - 10x + 21 = 0$        $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 21}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = 7$  und  $x_2 = 3$        $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{3; 7\}$
- d)  $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 7x + 12}$        $x^2 + 7x + 12 = 0$        $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = -4$  und  $x_2 = -3$        $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -4\}$
- e)  $\frac{3x}{x^2 + 5x + 6}$        $x^2 + 5x + 6 = 0$        $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = -2$  und  $x_2 = -3$        $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$
- f)  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 8}$        $x^2 + 2x - 8 = 0$        $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = 2$  und  $x_2 = -4$        $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2; -4\}$
- g)  $\frac{3x - 8}{x^2 - 5x - 14}$        $x^2 - 5x - 14 = 0$        $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = 7$  und  $x_2 = -2$        $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 7\}$
- h)  $\frac{x^2 + 16}{x^2 - 9x + 14}$        $x^2 - 9x + 14 = 0$        $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$   
mit den Lösungen       $x_1 = 7$  und  $x_2 = 2$        $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2; 7\}$

### Lösung Aufgabe 8

- a)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$
- $f(1) = \frac{\cancel{1+1}}{\cancel{1-1}}$  existiert nicht, 1 gehört ja aus diesem Grunde auch nicht zum Definitionsbereich.
- $f(2) = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3,$   $f(3) = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2,$
- $f(-1) = \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0$
- b)  $f(x) = \frac{8x}{x^2-4} = \frac{8x}{(x+2)(x-2)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 2\}$
- $f(1) = \frac{8}{1-4} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3},$   $f(2) = \frac{\cancel{16}}{\cancel{4-4}} = \frac{\cancel{16}}{0}$  existiert nicht,  $2 \notin D.$
- $f(-3) = \frac{-24}{9-4} = \frac{-24}{5} = -\frac{24}{5},$   $f(\frac{1}{2}) = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-4} = \frac{4}{\frac{1}{4}-\frac{16}{4}} = \frac{4}{-\frac{15}{4}} = -\frac{4 \cdot 4}{15} = -\frac{16}{15},$
- $f(0) = \frac{0}{0-4} = 0$
- c)  $f(x) = \frac{x^2-3}{(x+1)(x-2)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 2\}$
- $f(1) = \frac{1-3}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1,$   $f(2) = \frac{\cancel{4-3}}{\cancel{3 \cdot 0}} = \frac{1}{0}$  denn  $2 \notin D,$
- $f(-3) = \frac{9-3}{(-2) \cdot (-5)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$   $f(5) = \frac{25-3}{6 \cdot 3} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9},$
- $f(0) = \frac{0-3}{1 \cdot (-2)} = \frac{-3}{-2} = +\frac{3}{2}$
- d)  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x-5} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+5)}$   $D = \mathbb{Q} \setminus \{1; -5\}$
- $f(1) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{1+4-5}} = \frac{3}{0},$  denn  $1 \notin D,$   $f(2) = \frac{5}{4+8-5} = \frac{5}{7},$   $f(-3) = \frac{-5}{9-12-5} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$
- $f(5) = \frac{11}{25+20-5} = \frac{11}{40},$   $f(0) = \frac{1}{0+0-5} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$
- e)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+8}$  Der Nenner ist für alle x mindestens 8, wird also nie 0:  $D = \mathbb{Q}$
- $f(1) = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9},$   $f(-2) = \frac{4}{4+8} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$
- $f(\pm 6) = \frac{36}{36+8} = \frac{36}{44} = \frac{9}{11},$   $f(0) = \frac{0}{0+8} = \frac{0}{8} = 0$

## Lösung Aufgabe 9

$$\text{a) } T(x) = \frac{x+5}{2-x}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}+5}{2-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{21}{4} \cdot \frac{4}{7} = 3 \quad \text{oder} \quad T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\left(\frac{1}{4}+5\right) \cdot 4}{\left(2-\frac{1}{4}\right) \cdot 4} = \frac{1+20}{8-1} = \frac{21}{7} = 3$$

$$T\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\frac{3}{5}+5}{2-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{28}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{28}{5} \cdot \frac{5}{7} = 4 \quad \text{oder} \quad T\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\left(\frac{3}{5}+5\right) \cdot 5}{\left(2-\frac{3}{5}\right) \cdot 5} = \frac{3+25}{10-3} = \frac{28}{7} = 4$$

$$T\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{-\frac{7}{2}+5}{2+\frac{7}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{11} \quad \text{oder} \quad T\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{7}{2}+5\right) \cdot 2}{\left(2+\frac{7}{2}\right) \cdot 2} = \frac{-7+10}{4+7} = \frac{3}{11}$$

$$\text{b) } T(x) = \frac{5x-2}{x^2-4x}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5 \cdot \frac{1}{4} - 2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{\frac{1}{16} - 1} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{15}{16}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\text{oder so: } T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5 \cdot \frac{1}{4} - 2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{5}{4} - 2\right) \cdot 16}{\left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdot 16} = \frac{20 - 32}{1 - 16} = \frac{-12}{-15} = \frac{4}{5}$$

$$T\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{5 \cdot \frac{3}{5} - 2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{3 - 2}{\frac{9}{25} - \frac{12}{5}} = \frac{1}{\frac{9-60}{25}} = \frac{25}{-51} = -\frac{25}{51}$$

$$T\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{5 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 2}{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{-\frac{35}{2} - 2}{\frac{49}{4} + 14} = \frac{-\frac{39}{2}}{\frac{105}{4}} = -\frac{39}{2} \cdot \frac{4}{105} = -\frac{13 \cdot 2}{35} = -\frac{26}{35}$$

$$\text{oder so: } T\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{5 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 2}{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{\left(-\frac{35}{2} - 2\right) \cdot 4}{\left(\frac{49}{4} + 14\right) \cdot 4} = \frac{-70 - 8}{49 + 56} = -\frac{78}{105} = -\frac{26}{35}$$

$$\text{c) } T(x) = \frac{x^2}{(x+3)(x-1)}, \quad T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}+3\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} = -\frac{1}{7}$$

$$\text{oder so: } T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}+3\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\frac{1}{4} \cdot 4}{\frac{7}{4} \cdot 4} = -\frac{1}{7}$$

$$T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}+3\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{11}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{11} = -\frac{4}{11}$$

$$\text{oder so: } T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}+3\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{11}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{\frac{4}{9} \cdot 9}{\frac{11}{9} \cdot 9} = -\frac{4}{11}$$

$$T\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{\left(-\frac{3}{5}+3\right)\left(-\frac{3}{5}-1\right)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{8}{5}\right)} = -\frac{9}{96} \cdot \frac{25}{25} = -\frac{3}{32}$$

$$\text{oder so: } T\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{\left(-\frac{3}{5}+3\right)\left(-\frac{3}{5}-1\right)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{8}{5}\right)} = -\frac{\frac{9}{25} \cdot 25}{\frac{96}{25} \cdot 25} = -\frac{9}{96} = -\frac{3}{32}$$

$$d) \quad T(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 9}$$

$$T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 16}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 9} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{144}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{81}{9}} = \frac{-\frac{143}{9}}{\frac{82}{9}} = -\frac{143}{9} \cdot \frac{9}{82} = -\frac{143}{82}$$

$$\text{oder besser so:} \quad T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 16}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 9} = \frac{\left(\frac{1}{9} - 16\right) \cdot 9}{\left(\frac{1}{9} + \frac{81}{9}\right) \cdot 9} = \frac{1 - 144}{1 + 81} = \frac{-143}{82} = -\frac{143}{82}$$

$$T\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 16}{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9} = \frac{\frac{81}{4} - \frac{64}{4}}{\frac{81}{4} + \frac{36}{4}} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{117}{4}} = \frac{17}{4} \cdot \frac{4}{117} = \frac{17}{117}$$

$$\text{oder besser so:} \quad T\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 16}{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9} = \frac{\left(\frac{81}{4} - 16\right) \cdot 4}{\left(\frac{81}{4} + 9\right) \cdot 4} = \frac{81 - 64}{81 + 36} = \frac{17}{117}$$

$$T\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 16}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 9} = \frac{\frac{16}{25} - \frac{400}{25}}{\frac{16}{25} + \frac{225}{25}} = \frac{-\frac{384}{25}}{\frac{241}{25}} = -\frac{384}{25} \cdot \frac{25}{241} = -\frac{384}{241}$$

$$\text{oder besser so:} \quad T\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 16}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 9} = \frac{\left(\frac{16}{25} - 16\right) \cdot 25}{\left(\frac{16}{25} + 9\right) \cdot 25} = \frac{16 - 400}{16 + 225} = -\frac{384}{241}$$

$$e) \quad T(x) = \frac{x-3}{2x+4} + \frac{x+1}{x}$$

$$T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3} - 3}{2 \cdot \frac{1}{3} + 4} + \frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{14}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{14} + \frac{4}{3} \cdot 3 = -\frac{4}{7} + 4 = \frac{24}{7}$$

$$T\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{\frac{9}{2} - 3}{2 \cdot \frac{9}{2} + 4} + \frac{\frac{9}{2} + 1}{\frac{9}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{13} + \frac{\frac{11}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{3}{26} + \frac{11}{9} = \frac{27 + 286}{9 \cdot 26} = \frac{313}{234}$$

$$T\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-\frac{4}{5} - 3}{2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 4} + \frac{-\frac{4}{5} + 1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{\frac{19}{5}}{\frac{12}{5}} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{19}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{19+3}{12} = -\frac{22}{12} = -\frac{11}{6}$$

### Lösung Aufgabe 10

$$\text{a) } \frac{12ab^2}{18a^3b} = \frac{2b}{3a^2}$$

$$\text{b) } \frac{32x^4y^5z^2}{24x^4y^4z^4} = \frac{4y}{3z^2}$$

$$\text{c) } \frac{48u^2v^5}{80u^9v^3} = \frac{3v^2}{5u^7}$$

$$\text{d) } \frac{27x^5yz^3}{45x^4y^2z^3} = \frac{3x}{5y}$$

$$\text{e) } \frac{111u^4v^4w^4}{74u^5v^4w^3} = \frac{3w}{2u}$$

$$\text{f) } \frac{38x^{12}y^{20}z^{14}}{57x^{14}y^{18}z^9} = \frac{2y^2z^5}{3x^2}$$

### Lösung Aufgabe 11

$$\text{a) } \frac{4(x+3)}{8(3+x)} = \frac{4\cancel{(x+3)}}{8\cancel{(x+3)}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \frac{15(x+2)}{15+2} \quad \text{Man kann nicht kürzen.}$$

$$\text{c) } \frac{24(2x+3)}{12(2x+3)^2} = \frac{2}{2x+3}$$

$$\text{d) } \frac{8a(3a+2b)^2}{16a^2(2b+3a)} = \frac{3a+2b}{2a}$$

$$\text{e) } \frac{(a+3b)^2(b+3a)}{(a+3b)(b+3a)^2} = \frac{a+3b}{b+3a}$$

$$\text{f) } \frac{15x}{30x^2+15x} = \frac{15x}{15x(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$$

### Lösung Aufgabe 12

$$\text{a) } \frac{x^2+4x}{3x+12} = \frac{x(x+4)}{3(x+4)} = \frac{x}{3}$$

$$\text{b) } \frac{16x^2-8x}{24x-12} = \frac{8x(2x-1)}{12(2x-1)} = \frac{2x}{3}$$

$$\text{c) } \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)} = x-y$$

$$\text{d) } \frac{3x+4}{9x^2-16} = \frac{(3x+4)}{(3x+4)(3x-4)} = \frac{1}{3x-4}$$

$$\text{e) } \frac{45x+105}{45x^2-245} = \frac{15(3x+7)}{5(9x^2-49)} = \frac{3(3x+7)}{(3x+7)(3x-7)} = \frac{3}{3x-7}$$

$$\text{f) } \frac{x^4-4x^2}{2x^2-4x} = \frac{x^2(x^2-4)}{2x(x-2)} = \frac{x^2(x+2)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{x(x+2)}{2} = \frac{x^2+2x}{2}$$

### Lösung Aufgabe 13

- a) 
$$\frac{x^4 - 16}{(x+2)^2} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(x-2)(x^2 + 4)}{(x+2)^2} = \frac{(x-2)(x^2 + 4)}{x+2}$$
- b) 
$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - 9)(4 - x^2)}{(3+x)(x-2)} &= \frac{(x+3)(x-3)(2-x)(2+x)}{(3+x)(x-2)} \\ &= -\frac{(x+3)(x-3)(2-x)(2+x)}{(3+x)(2-x)} = -(x-3)(2+x) \end{aligned}$$
- c) 
$$\frac{x^2y^2 - xy^3}{x^2y^2 + xy^3} = \frac{xy^2(x-y)}{xy^2(x+y)} = \frac{x-y}{x+y}$$
- d) 
$$\frac{81x^4 - 1}{(3x+1)^2} = \frac{(9x^2 - 1)(9x^2 + 1)}{(3x+1)^2} = \frac{(3x+1)(3x-1)(9x^2 + 1)}{(3x+1)^2} = \frac{(3x-1)(9x^2 + 1)}{(3x+1)}$$
- e) 
$$\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$$
- f) 
$$\frac{2x^2 - 128}{x^2 + 16x + 64} = \frac{2(x^2 - 64)}{(x+8)^2} = \frac{2(x+8)(x-8)}{(x+8)^2} = \frac{2(x-8)}{x+8}$$

### Lösung Aufgabe 14

- a) 
$$\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+1}{x-1}$$
- b) 
$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)^2} = \frac{x-5}{x+2}$$
- c) 
$$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 8x + 16} = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-4)^2} \quad \text{Man kann nicht kürzen.}$$
- d) 
$$\frac{x^2 - 2x - 24}{x^3 - 16x} = \frac{(x-6)(x+4)}{x(x^2 - 16)} = \frac{(x-6)(x+4)}{x(x-4)(x+4)} = \frac{x-6}{x(x-4)}$$
- e) 
$$\frac{x^2 - 4x - 45}{(x^2 - 81)(x^2 - 25)} = \frac{(x+5)(x-9)}{(x-9)(x+9)(x-5)(x+5)} = \frac{1}{(x+9)(x-5)}$$
- f) 
$$\frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^4 - 10x^2 + 9} = \frac{((x-1)(x+3))^2}{(x^2 - 1)(x^2 - 9)} = \frac{(x-1)^2(x+3)^2}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-3)}$$

**Lösung Aufgabe 15**

$$\text{a) } \frac{4x-12}{15-5x} = \frac{4(x-3)}{5(3-x)} = -\frac{4(3-x)}{5(3-x)} = -\frac{4}{5}$$

Vertauschen der Zahlen in der Differenz im Zähler ändert das Vorzeichen.

Zum Ausgleich setzen wir ein Minuszeichen davor:  $x-3 = -(3-x)$

$$\text{b) } \frac{x^2-4x}{(16-x^2)} = \frac{x(x-4)}{(4-x)(4+x)} = \frac{-x(4-x)}{(4-x)(4+x)} = -\frac{x}{4+x} = -\frac{x}{x+4}$$

$$\text{c) } \frac{25-x^2}{x^2-10x+25} = \frac{(5-x)(5+x)}{(x-5)^2} = \frac{-(x-5)(5+x)}{(x-5)^2} = -\frac{5+x}{x-5} = -\frac{x+5}{x-5}$$

$$\text{d) } \frac{x^2+2x-3}{-x^2-3x+4} = \frac{(x-1)(x+3)}{-(x^2+3x-4)} = \frac{(x-1)(x+3)}{-(x+4)(x-1)} = -\frac{x+3}{x+4}$$

## Aufgaben aus 12111: Rechnen mit Bruchtermen

### Lösung Aufgabe 16

- a)  $\frac{7}{12} + \frac{11}{18} = \frac{7}{2 \cdot 6} + \frac{11}{3 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{11 \cdot 2}{3 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{21+22}{3 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{43}{36}$
- b)  $\frac{11}{42} - \frac{5}{28} = \frac{11}{3 \cdot 14} - \frac{5}{2 \cdot 14} = \frac{11 \cdot 2}{3 \cdot 14 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 14 \cdot 3} = \frac{22-15}{84} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$
- c)  $\frac{19}{30} + \frac{1}{70} = \frac{19}{3 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{19 \cdot 7}{3 \cdot 10 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3}{7 \cdot 10 \cdot 3} = \frac{133+3}{210} = \frac{136}{210} = \frac{68}{105}$
- d)  $\frac{15}{32} - \frac{49}{80} = \frac{15}{2 \cdot 16} - \frac{49}{5 \cdot 16} = \frac{15 \cdot 5}{2 \cdot 16 \cdot 5} - \frac{49 \cdot 2}{5 \cdot 16 \cdot 2} = \frac{75-98}{5 \cdot 16 \cdot 2} = \frac{-23}{160} = -\frac{23}{160}$

### Lösung Aufgabe 17

- a)  $\frac{5}{6} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{30+9+8}{36} = \frac{47}{36}$
- b)  $\frac{3}{14} + \frac{5}{28} + \frac{1}{18} = \frac{3}{2 \cdot 7} + \frac{5}{4 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 9}{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{54+45+14}{252} = \frac{113}{252}$
- c)  $\frac{24}{25} - \frac{7}{20} + \frac{11}{15} = \frac{24}{5 \cdot 5} - \frac{7}{4 \cdot 5} + \frac{11}{3 \cdot 5} = \frac{24 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{11 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{288-105+220}{300} = \frac{403}{300}$
- d)  $\frac{13}{16} - \frac{5}{24} - \frac{7}{18} = \frac{13}{2 \cdot 8} - \frac{5}{3 \cdot 8} - \frac{7}{2 \cdot 9} = \frac{13 \cdot 9}{2 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{117-30-56}{16 \cdot 9} = \frac{31}{144}$



### Lösung Aufgabe 18

$$\text{a) } 4 - \frac{3}{x} = \frac{4x}{x} - \frac{3}{x} = \frac{4x-3}{x}$$

$$\text{b) } \frac{1}{3}x + \frac{2}{x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{x} = \frac{x^2}{3x} + \frac{2 \cdot 3}{3x} = \frac{x^2+6}{3x}$$

$$\text{c) } x+2 - \frac{4}{x} = \frac{(x+2) \cdot x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{x^2+2x-4}{x}$$

$$\text{d) } \frac{x}{4} - \frac{4}{x^2} = \frac{x \cdot x^2}{4 \cdot x^2} - \frac{4 \cdot 4}{x^2 \cdot 4} = \frac{x^3-16}{4x^2}$$

$$\text{e) } \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} = \frac{x^2 \cdot x}{2 \cdot x} - \frac{4 \cdot 2}{x \cdot 2} = \frac{x^3-8}{2x}$$

$$\text{f) } \frac{4}{x} + \frac{5}{3x} = \frac{4 \cdot 3 + 5}{3x} = \frac{17}{3x}$$

$$\text{g) } 2x - \frac{5}{x+2} = \frac{2x \cdot (x+2)}{1 \cdot (x+2)} - \frac{5}{x+2} = \frac{2x^2+4x-5}{x+2}$$

$$\text{h) } \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + x^2}{x(x+1)} = \frac{x^2+2x+1+x^2}{x(x+1)} = \frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{x-2}{3} - \frac{3}{x} + \frac{5-x}{6x} &= \frac{2x \cdot (x-2) - 6 \cdot 3 + (5-x)}{6x} = \frac{2x^2-4x-18+5-x}{6x} \\ &= \frac{2x^2-5x-13}{6x} \end{aligned}$$

$$\text{j) } \frac{4-x}{x^2} + \frac{x+1}{4x} = \frac{4(4-x) + x(x+1)}{4x^2} = \frac{16-4x+x^2+x}{4x^2} = \frac{x^2-3x+16}{4x^2}$$

$$\text{k) } \frac{4}{x+1} - \frac{4}{x+2} = \frac{4(x+2) - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{4x+8-4x-4}{(x+1)(x+2)} = \frac{4}{(x+1)(x+2)}$$

$$\text{l) } \frac{5}{x+1} + \frac{5}{x-1} = \frac{5(x-1) + 5(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5x-5+5x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{10x}{x^2-1}$$

$$\text{m) } \frac{10x+5}{(2x+1)^2} - \frac{5}{2x+1} = \frac{10x+5-5(2x+1)}{(2x+1)^2} = \frac{10x+5-10x-5}{(2x+1)^2} = \frac{0}{(2x+1)^2} = 0$$

$$\text{n) } \frac{4+x}{4-x} + \frac{1}{x-4} = \frac{4+x}{4-x} - \frac{1}{4-x} = \frac{4+x-1}{4-x} = \frac{x+3}{4-x}$$

Hier wurde im 2. Nenner die Differenz vertauscht, wozu man ein Minuszeichen anschreiben musste:  $x-4 = -(4-x)$

$$\text{o) } \frac{4}{3x^2} + \frac{2x^2}{5x^4} - \frac{x}{x^3} = \frac{4 \cdot 5x^2 + 2x^2 \cdot 3 - x \cdot 15x}{15x^4} = \frac{20x^2 + 6x^2 - 15x^2}{15x^4} = \frac{11x^2}{15x^4} = \frac{11}{15x^2}$$

Man sollte besser schon im gegebenen Term kürzen:

$$\frac{4}{3x^2} + \frac{2x^2}{5x^4} - \frac{x}{x^3} = \frac{4}{3x^2} + \frac{2}{5x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 15}{15x^2} = \frac{11}{15x^2}$$

### Lösung Aufgabe 19

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{2}{5x^2 + 4x} + \frac{3x}{5x + 4} = \frac{2 + 3x \cdot x}{x \cdot (5x + 4)} = \frac{2 + 3x^2}{x \cdot (5x + 4)} \\
 \text{b)} \quad & \frac{2x + 1}{(3x - 4)(x + 3)} + \frac{5x - 2}{(2x - 1)(x + 3)} = \frac{(2x + 1)(2x - 1) + (5x - 2)(3x - 4)}{(3x - 4)(x + 3)(2x - 1)} \\
 & = \frac{4x^2 - 1 + 15x^2 - 20x - 6x + 8}{(3x - 4)(x + 3)(2x - 1)} = \frac{19x^2 - 26x + 7}{(3x - 4)(x + 3)(2x - 1)} \\
 \text{c)} \quad & \frac{12x}{8x - 48} - \frac{7x}{5x + 30} = \frac{12x}{8(x - 6)} - \frac{7x}{5(x + 6)} = \frac{3x}{2(x - 6)} - \frac{7x}{5(x + 6)} \\
 & = \frac{3x \cdot 5(x + 6) - 7x \cdot 2(x - 6)}{10(x - 6)(x + 6)} = \frac{15x^2 + 90x - 14x^2 + 84x}{10(x^2 - 36)} = \frac{x^2 + 174x}{10(x^2 - 36)} \\
 \text{d)} \quad & \frac{3x - 1}{x^2 - 2x} + \frac{4x + 11}{x^2 + 2x} = \frac{3x - 1}{(x - 2)x} + \frac{4x + 11}{(x + 2)x} = \frac{(3x - 1)(x + 2) + (4x + 11)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)x} \\
 & \frac{3x^2 + 5x - 2 + 4x^2 + 3x - 22}{(x - 2)(x + 2)x} = \frac{7x^2 + 8x - 24}{(x - 2)(x + 2)x}
 \end{aligned}$$

### Lösung Aufgabe 20

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{14x - 49}{x^2 - 49} + \frac{x - 7}{x + 7} = \frac{14x - 49}{(x + 7)(x - 7)} + \frac{x - 7}{x + 7} = \frac{14x - 49 + (x - 7)^2}{(x + 7)(x - 7)} \\
 & \frac{14x - 49 + x^2 - 14x + 49}{(x + 7)(x - 7)} = \frac{x^2}{x^2 - 49} \\
 \text{b)} \quad & \frac{x^2 + 4}{3x^2 - 12} + \frac{3x}{2 - x} - \frac{5x}{x + 2} = \frac{x^2 + 4}{3(x^2 - 4)} - \frac{3x}{x - 2} - \frac{5x}{x + 2} \\
 & = \frac{x^2 + 4 - 3x \cdot 3(x + 2) - 5x \cdot 3(x - 2)}{3(x + 2)(x - 2)} = \frac{x^2 + 4 - 9x^2 - 18x - 15x^2 + 30x}{3(x + 2)(x - 2)} \\
 & \frac{-23x^2 + 12x + 4}{3(x^2 - 4)} \\
 \text{c)} \quad & \frac{4x}{(x + 3)^2} - \frac{2x}{x^2 - 9} = \frac{4x}{(x + 3)^2} - \frac{2x}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{4x(x - 3) - 2x(x + 3)}{(x + 3)^2(x - 3)} \\
 & = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 6x}{(x + 3)^2(x - 3)} = \frac{2x^2 - 18x}{(x + 3)^2(x - 3)} \\
 \text{d)} \quad & \frac{x + y}{2x + 3y} + \frac{y - x}{3x - 2y} = \frac{(x + y)(3x - 2y) + (y - x)(2x + 3y)}{(2x + 3y)(3x - 2y)} \\
 & = \frac{3x^2 - 2xy + 3xy - 2y^2 + [2xy + 3y^2 - 2x^2 - 3xy]}{(2x + 3y)(3x - 2y)} = \frac{x^2 + y^2}{(2x + 3y)(3x - 2y)}
 \end{aligned}$$

### Lösung Aufgabe 21

$$\text{a) } \frac{8x+2}{x^2-4x-21} - \frac{5x+12}{x^2-49}$$

**Faktorisierung der Nenner:**

$$(1) \quad x^2 - 4x - 21 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (ab)$$

Zerlegung von -21 in ein Produkt  $a \cdot b$ , mit der Summe  $a + b = -4$ :

$$-21 = (-3) \cdot 7 \Rightarrow (-3) + 7 = 4 \quad \text{falsch}$$

$$-21 = 3 \cdot (-7) \Rightarrow 3 + (-7) = -4 \quad \text{richtig}$$

$$\text{Also gilt:} \quad x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7)$$

$$(2) \quad x^2 - 49 = (x+7)(x-7)$$

**Folgerung:**

$$\begin{aligned} \frac{8x+2}{x^2-4x-21} - \frac{5x+12}{x^2-49} &= \frac{8x+2}{(x+3)(x-7)} - \frac{5x+12}{(x+7)(x-7)} \\ &= \frac{(8x+2)(x+7) - (5x+12)(x+3)}{(x+3)(x-7)(x+7)} = \frac{8x^2 + 56x + 2x + 14 - [5x^2 + 15x + 12x + 36]}{(x+3)(x-7)(x+7)} \\ &= \frac{8x^2 + 56x + 2x + 14 - 5x^2 - 15x - 12x - 36}{(x+3)(x-7)(x+7)} = \frac{3x^2 + 31x - 22}{(x+3)(x-7)(x+7)} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{x^2-4}{x^2+12x+35} - \frac{x^2-5}{x^2+10x+25}$$

**Faktorisierung der Nenner:**

$$(1) \quad x^2 + 12x + 35 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (ab)$$

Zerlegung von 35 in ein Produkt  $a \cdot b$ , so dass  $a + b = 12$  ist:

$$35 = 5 \cdot 7 \Rightarrow 5 + 7 = 12 \quad \text{richtig}$$

$$\text{Also gilt:} \quad x^2 + 12x + 35 = (x+5)(x+7)$$

$$(2) \quad x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

**Folgerung:**

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{x^2+12x+35} - \frac{x^2-5}{x^2+10x+25} &= \frac{x^2-4}{(x+5)(x+7)} - \frac{x^2-5}{(x+5)^2} \\ &= \frac{(x^2-4)(x+5) - (x^2-5)(x+7)}{(x+5)^2(x+7)} = \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20 - [x^3 + 7x^2 - 5x - 35]}{(x+5)^2(x+7)} \\ &= \frac{\cancel{x^3} + 5x^2 - 4x - 20 - \cancel{x^3} - 7x^2 + 5x + 35}{(x+5)^2(x+7)} = \frac{-2x^2 + x + 15}{(x+5)^2(x+7)} \end{aligned}$$

$$c) \quad \frac{4x+1}{x^2-12x+36} - \frac{5x+2}{x^2-4x-12}$$

**Faktorisierung der Nenner:**

$$(1) \quad x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

$$(2) \quad x^2 - 4x - 12 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (ab)$$

Zerlegung von  $-12$  in ein Produkt  $a \cdot b$ , so dass  $a + b = -4$  ist:

$$-12 = 2 \cdot (-6) \Rightarrow 2 + (-6) = -4 \quad \text{richtig}$$

$$\text{Also gilt: } x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$$

**Folgerung:**

$$\begin{aligned} \frac{4x+1}{x^2-12x+36} - \frac{5x+2}{x^2-4x-12} &= \frac{4x+1}{(x-6)^2} - \frac{5x+2}{(x+2)(x-6)} \\ &= \frac{(4x+1)[x+2]}{(x-6)^2[x+2]} - \frac{(5x+2)[x-6]}{(x+2)(x-6)[x-6]} = \frac{4x^2+9x+2-(5x^2-28x-12)}{(x-6)^2(x+2)} \\ &= \frac{-x^2+37x+14}{(x-6)^2(x+2)} \end{aligned}$$

$$d) \quad \frac{x^2+3x-1}{x^2-4x-5} - \frac{x^2-2x+2}{x^2+5x+4}$$

**Faktorisierung der Nenner:**

$$(1) \quad x^2 - 4x - 5 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (ab)$$

Zerlegung von  $-5$  in ein Produkt  $a \cdot b$ , so dass  $a + b = -4$  ist:

$$-5 = 1 \cdot (-5) \Rightarrow 1 + (-5) = -4 \quad \text{richtig}$$

$$\text{Also gilt: } x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$$

$$(2) \quad x^2 + 5x + 4 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (ab)$$

Zerlegung von  $4$  in ein Produkt  $a \cdot b$ , so dass  $a + b = 5$  ist:

$$4 = 1 \cdot 4 \Rightarrow 1 + 4 = 5 \quad \text{richtig}$$

$$\text{Also gilt: } x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

**Folgerung:**

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3x-1}{x^2-4x-5} - \frac{x^2-2x+2}{x^2+5x+4} &= \frac{x^2+3x-1}{(x+1)(x-5)} - \frac{x^2-2x+2}{(x+1)(x+4)} \\ &= \frac{(x^2+3x-1)(x+4) - (x^2-2x+2)(x-5)}{(x+1)(x-5)(x+4)} \\ &= \frac{x^3+4x^2+3x^2+12x-x-4 - [x^3-5x^2-2x^2+10x+2x-10]}{(x+1)(x-5)(x+4)} = \frac{14x^2-x+6}{(x+1)(x-5)(x+4)} \end{aligned}$$

### Lösung Aufgabe 22

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \quad & \frac{8}{3x^2 - 75} + \frac{2}{x^2 + 10x + 25} - \frac{1}{6x} = \frac{8}{3 \underbrace{(x^2 - 25)}_{(x+5)(x-5)}} + \frac{2}{\underbrace{x^2 + 10x + 25}_{(x+5)^2}} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot x} \\
 & = \frac{8 \cdot 2x \cdot (x+5) + 2 \cdot 6x \cdot (x-5) - 1 \cdot (x^2 - 25)(x+5)}{6x \cdot (x+5)^2 (x-5)} \\
 & = \frac{16x^2 + 80x + 12x^2 - 60x - [x^3 + 5x^2 - 25x - 125]}{6x \cdot (x+5)^2 (x-5)} \\
 & = \frac{16x^2 + 80x + 12x^2 - 60x - x^3 - 5x^2 + 25x + 125}{6x \cdot (x+5)^2 (x-5)} \\
 & = \frac{-x^3 + 23x^2 + 45x + 125}{6x \cdot (x+5)^2 (x-5)}
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \quad \frac{2}{x^2 - 14x + 49} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9} - \frac{4}{x^2 - 10x + 21}$$

**Faktorisierung der Nenner:**

$$(1) \quad x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2 \quad \text{2. Binomische Formel}$$

$$(2) \quad x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \quad \text{2. Binomische Formel}$$

$$(3) \quad x^2 - 10x + 21 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (ab)$$

Zerlegung von 21 in Faktoren a und b, deren Summe -10 sein muss:

$$\begin{array}{l}
 21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow 3 + 7 = 10 \quad \text{falsch} \\
 21 = (-3) \cdot (-7) \Rightarrow (-3) + (-7) = -10 \quad \text{richtig}
 \end{array}$$

$$\text{Also ist } x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$$

**Folgerung:**

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{x^2 - 14x + 49} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9} - \frac{4}{x^2 - 10x + 21} = \frac{2}{(x-7)^2} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{4}{(x-3)(x-7)} \\
 & = \frac{2 \cdot (x-3)^2 + 2(x-7)^2 - 4(x-3)(x-7)}{(x-7)^2 (x-3)^2} \\
 & = \frac{2(x^2 - 6x + 9) + 2(x^2 - 14x + 49) - 4(x^2 - 10x + 21)}{(x-7)^2 (x-3)^2} \\
 & = \frac{2x^2 - 12x + 18 + 2x^2 - 28x + 98 - 4x^2 + 40x - 84}{(x-7)^2 (x-3)^2} = \frac{32}{(x-7)^2 (x-3)^2}
 \end{aligned}$$

### Lösung Aufgabe 23

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{12}{7} \cdot \frac{28}{15} = \frac{\cancel{3} \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot 7}{7 \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{16}{5} \\ \text{b)} & \frac{44}{9} \cdot \frac{18}{77} = \frac{4 \cdot \cancel{11} \cdot 2 \cdot \cancel{9}}{\cancel{9} \cdot 7 \cdot \cancel{11}} = \frac{8}{7} \\ \text{c)} & \frac{50}{39} \cdot \frac{56}{75} = \frac{2 \cdot \cancel{25}}{3 \cdot 13} \cdot \frac{7 \cdot 8}{3 \cdot \cancel{25}} = \frac{112}{117} \\ \text{d)} & \frac{21}{20} \cdot \frac{36}{91} = \frac{3 \cdot \cancel{7}}{4 \cdot 5} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 9}{13 \cdot \cancel{7}} = \frac{27}{65} \\ \text{e)} & \frac{24}{85} \cdot \frac{51}{32} = \frac{3 \cdot \cancel{8}}{5 \cdot 17} \cdot \frac{3 \cdot 17}{4 \cdot \cancel{8}} = \frac{9}{20} \end{array}$$

### Lösung Aufgabe 24

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{14}{9} \cdot \frac{28}{45} = \frac{\cancel{14} \cdot \cancel{45}^5}{\cancel{9} \cdot \cancel{28}_2} = \frac{5}{2} \\ \text{b)} & \frac{2}{15} \cdot \frac{16}{45} = \frac{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{45}^3}{\cancel{15}_1 \cdot \cancel{16}_8} = \frac{3}{8} \\ \text{c)} & \frac{36}{49} \cdot \frac{24}{35} = \frac{\cancel{36}^3}{\cancel{49}_7} \cdot \frac{\cancel{35}^5}{\cancel{24}_2} = \frac{15}{14} \\ \text{d)} & \frac{8}{19} \cdot \frac{2}{57} = \frac{\cancel{8}^4}{\cancel{19}_1} \cdot \frac{\cancel{57}^3}{\cancel{2}_1} = \frac{12}{1} = 12 \\ \text{e)} & \frac{5}{12} \cdot \frac{15}{8} = \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{15}_3} = \frac{2}{9} \end{array}$$

### Lösung Aufgabe 25

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{3}{\cancel{4}_1} \cdot 8^2 = \frac{6}{1} = 6 & \text{b)} & \frac{12}{\cancel{25}_5} \cdot 15^3 = \frac{36}{5} & \text{c)} & \sqrt[4]{24} \cdot \frac{5}{\cancel{18}_3} = \frac{20}{3} \\ \text{d)} & \sqrt[5]{40} \cdot \frac{13}{\cancel{16}_2} = \frac{65}{2} & \text{e)} & \frac{11}{\cancel{3}_1} \cdot 12^4 = \frac{44}{1} = 44 \end{array}$$

### Lösung Aufgabe 26

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{20}{33} : 4 = \frac{20^5}{33 \cdot \cancel{4}_1} = \frac{5}{33} \\ \text{b)} & \frac{15}{2} : 4 = \frac{15}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8} \\ \text{c)} & \frac{42}{25} : 28 = \frac{\cancel{42}^3}{25 \cdot \cancel{28}_2} = \frac{3}{50} \\ \text{d)} & 12 : \frac{3}{8} = \cancel{12} \cdot \frac{8}{\cancel{3}_1} = 32 \\ \text{e)} & 108 : \frac{24}{25} = 108 \cdot \frac{25}{24} = \frac{9 \cdot \cancel{12}^1 \cdot 25}{\cancel{24}_2} = \frac{225}{2} \end{array}$$

### Lösung Aufgabe 27

- a)  $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x}{x+1} = \frac{2x^2}{3(x+1)} = \frac{2x^2}{3x+3}$       b)  $\frac{\cancel{5}^1 \cdot x^3}{x^2 \cdot \cancel{15}_3} = \frac{x}{3}$
- c)  $\frac{x-2}{x+3} \cdot \frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-9}$
- d)  $\frac{x^2-4}{3x} \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{3x} \cdot \frac{x+1}{\cancel{x+2}} = \frac{(x-2)(x+1)}{3x} = \frac{x^2-x-2}{3x}$
- e)  $\frac{x+1}{x^2+4x} \cdot \frac{x+4}{x^2-1} = \frac{\cancel{x+1}}{x(x+4)} \cdot \frac{\cancel{x+4}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$
- f)  $\frac{(x+1)^2}{\cancel{1}^4 \cancel{x}_1} \cdot \frac{\cancel{3}^2 \cancel{12}^2 x^2}{\cancel{x+1}_1} = \frac{(x+1) \cdot 3x}{1} = 3x^2 + 3x$
- g)  $\frac{x^2-25}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2-4}{x-5} = \frac{(x+5)\cancel{(x-5)}}{(x+2)(x+2)} \cdot \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x-5)}} = \frac{(x+5)(x-2)}{x+2} = \frac{x^2+3x-10}{x+2}$
- h)  $\frac{x^3-9x}{4x} \cdot \frac{16}{3-x} = \frac{\cancel{x}(x^2-9)}{\cancel{1}^4 \cancel{x}_1} \cdot \frac{\cancel{16}^4}{3-x} = \frac{(x+3)(x-3) \cdot 4}{(3-x)} = \frac{4(x+3)(x-3)}{-(x-3)} = -4(x+3) = -4x-12$

### Lösung Aufgabe 28

- a)  $\frac{ab}{c} : \frac{a^2b}{c^2} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{c^2}{a^2b} = \frac{c}{a}$       Es wurde durch a, b und c gekürzt.
- b)  $\frac{xyz^2}{a^2b} : \frac{x^3y^2z}{a^2b^2} = \frac{xyz^2}{a^2b} \cdot \frac{a^2b^2}{x^3y^2z} = \frac{zb}{xy}$       Es wurde durch  $x^2$ , y, z,  $a^2$  und b gekürzt.
- c)  $\frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{2x+4} = \frac{\cancel{x-1}}{x+2} \cdot \frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x-1}} = \frac{2}{1} = 2$
- d)  $\frac{x^2}{x+5} : \frac{x+5}{x^2} = \frac{x^2}{x+5} \cdot \frac{x^2}{x+5} = \frac{x^4}{(x+5)^2} = \frac{x^4}{x^2+10x+25}$       Man kann nicht kürzen.
- e)  $\frac{x+y}{x^2 \cdot y} : \frac{x^2-y^2}{x \cdot y^2} = \frac{x+y}{x^2 \cdot \cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{xy}^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y) \cdot y}{x \cdot (x-y)(x+y)} = \frac{y}{x^2-xy}$
- f)  $\frac{(x+1)^2}{(x-3)^3} : \frac{x^2-1}{x^2-9} = \frac{(x+1)^2}{(x-3)^3} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x-3)^3} \cdot \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)^2(x-1)}$
- g)  $\frac{24x}{(5x-2)^2} : \frac{48x}{25x^2-4} = \frac{24x^1}{(5x-2)^2} \cdot \frac{\cancel{(5x-2)}(5x+2)}{48x^2} = \frac{5x+2}{2(5x-2)} = \frac{5x+2}{10x-4}$
- h)  $\frac{x^2-8x}{x+3} : (2x-16) = \frac{x(x-8)}{(x+3) \cdot 2(x-8)} = \frac{x}{2x+6}$

**Aufgabe 29**

$$\text{a) } xy^2 \cdot \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = \left( \frac{x^2 y^2}{y} - \frac{xy^3}{x} \right) = x^2 y - y^3$$

$$\text{b) } \frac{ab}{cd} \cdot \left( \frac{abc}{d} + \frac{bcd}{a} \right) = \left( \frac{a^2 b^2 c}{cd^2} + \frac{ab^2 cd}{acd} \right) = \frac{a^2 b^2}{d^2} + b^2$$

$$\text{c) } \frac{a^2 b^2}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{abc} + \frac{ac}{b} - \frac{a}{bc} \right) = \left( \frac{a^2 b^2}{abc^3} + \frac{a^3 b^2 c}{bc^2} - \frac{a^3 b^2}{bc^3} \right) = \frac{ab}{c^3} + \frac{a^3 b}{c} - \frac{a^3 b}{c^3}$$

$$\text{d) } 4x^2 y \cdot \left( \frac{y}{8x^2} + \frac{1}{2xy^2} \right) = \left( \frac{4x^2 y^2}{8x^2} + \frac{4x^2 y}{2xy^2} \right) = \frac{y^2}{2} + \frac{2x}{y}$$

$$\text{e) } (a-b) \cdot \left( \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2-ab} \right) = \left( \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a-b)}{a(a-b)} \right) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a}$$